Adı Soyadı : 03.02.2022
Numara :

~~MTÖ~~ MAT 303 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I ~~FİNAL~~ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

SORU 1: Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için
$\alpha'(t)=(t^2,t,e^t)$ ve $\alpha(0)=(1,0,-5)$'dır. Bu $\alpha : I \to E^3$ eğrisini bulunuz.

SORU 2: Diferensiyel operatör'ü (d operatörü) tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

SORU 3: $f:E^3 \to IR$, $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_3^2$ ve $P=(1,1,0)\in E^3$, $V=(1,1,1)\in IR^3$ ise $\vec{V}_P[f]=?$

SORU 4: $F:E^n \to E^m$ dönüşümünün F_* türev dönüşümüne

$$\phi=\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P, 1\le i\le n\right\}\subset T_{E^n}(P) \text{ ve } \psi=\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{F(P)}, 1\le j\le m\right\}\subset T_{E^m}(F(P))$$

bazlarına göre karşılık gelen matrisi bulunuz.

SORU 5: $\forall f\in C(E^3,IR)$ için $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f)=0$ olduğunu gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

CEVAP ANAHTARI

1

$\alpha: I \to E^3$
$t \to \alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$

olsun. Buradan

$\alpha'(t)=(\alpha_1'(t),\alpha_2'(t),\alpha_3'(t))=(t^2,t,e^t)$ olur. Böylece

$\alpha_1'(t)=t^2 \Rightarrow \alpha_1(t)=\frac{t^3}{3}+c_1$, $\alpha_2'(t)=t \Rightarrow \alpha_2(t)=\frac{t^2}{2}+c_2$

$\alpha_3'(t)=e^t \Rightarrow \alpha_3'(t)=e^t+c_3$

yazılır. $\alpha(0)=(\alpha_1(0),\alpha_2(0),\alpha_3(0))=(1,0,-5)$

olduğundan

$\alpha_1(0)=c_1=1$, $\alpha_2(0)=c_2=0$, $\alpha_3(0)=1+c_3=-5 \Rightarrow c_3=-6$ olur.

$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))=\left(\frac{t^3}{3}+1, \frac{t^2}{2}, e^t-6\right)$ bulunur.

② Ders notunda mevcuttur.

③ $P=(1,1,0)\in E^3$, $V=(1,1,1)\in \mathbb{R}^3$ ve

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_3^2$ olmak üzere

$$\vec{V}_P[f]=\sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$$

$$=v_1\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_P+v_2\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_P+v_3\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_P$$

$$=1.(2x_1x_2)(P)+1.\,x_1^2(P)+2x_3(P)$$

$$=2+1=3$$

bulunur.

④ Ders notunda mevcuttur

⑤ $\forall f\in C(E^3,\mathbb{R})$ olsun. $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ olmak üzere

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\nabla\wedge\operatorname{grad} f$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}\right]+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}\right]$$

olup f dif bilir olduğundan $1\leq i,j\leq 3$ için $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ olur. Böylece

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\nabla\wedge\operatorname{grad} f=0.\frac{\partial}{\partial x_1}+0\frac{\partial}{\partial x_2}+0\frac{\partial}{\partial x_3}=(0,0,0)\in\chi(E^3)$$

elde edilir.